

**Задача 1**

**В-1** Сколько раз входит двойка в разложение на простые сомножители произведения

$$2026 \cdot 2027 \cdot \dots \cdot 4049 \cdot 4050?$$

**Ответ:** 2025

**Решение.**

$$(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2n = \frac{(2n)!}{n!} = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2^n$$

---

**В-2** Сколько раз входит двойка в разложение на простые сомножители произведения

$$2027 \cdot 2028 \cdot \dots \cdot 4051 \cdot 4052?$$

**Ответ:** 2026

---

**В-3** Сколько раз входит двойка в разложение на простые сомножители произведения

$$2223 \cdot 2224 \cdot \dots \cdot 4443 \cdot 4444?$$

**Ответ:** 2222

---

**В-4** Сколько раз входит двойка в разложение на простые сомножители произведения

$$2007 \cdot 2008 \cdot \dots \cdot 4011 \cdot 4012?$$

**Ответ:** 2006

---

**Задача 2**

**В-1** Число  $p$  таково, что уравнение

$$x^3 + px = 4$$

имеет три различных действительных корня. Найдите наибольшее возможное значение суммы кубов этих корней.

**Ответ:** 12

**Решение.** Обозначим корни уравнения через  $a, b$  и  $c$ . По теореме Виета для кубического уравнения:

$$a + b + c = 0, \quad ab + ac + bc = p, \quad abc = 4.$$

Теперь по формуле

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

получаем

$$a^3 + b^3 + c^3 = 0^3 - 3(-c)(-a)(-b) = 3abc = 12$$

Значит, искомая сумма от  $p$  не зависит и равна константе (если только имеется три корня).

Еще проще сразу заметить, что так как число  $a$  является корнем уравнения, то  $a^3 = -pa + 4$ . Аналогично  $b^3 = -bp + 4$ ,  $c^3 = -cp + 4$ . Поэтому

$$a^3 + b^3 + c^3 = -p(a + b + c) + 3 \cdot 4 = -p \cdot 0 + 12 = 12.$$

---

**В-2** Число  $p$  таково, что уравнение

$$x^3 - px = 6$$

имеет три различных действительных корня. Найдите наименьшее возможное значение суммы кубов этих корней.

**Ответ:** 18

---

**В-3** Число  $p$  таково, что уравнение

$$x^3 + 5 = px$$

имеет три различных действительных корня. Найдите наибольшее возможное значение суммы кубов этих корней.

**Ответ:** -15

---

**В-4** Число  $p$  таково, что уравнение

$$x^3 - 7 = px$$

имеет три различных действительных корня. Найдите наименьшее возможное значение суммы кубов этих корней.

**Ответ:** 21

---

### Задача 3

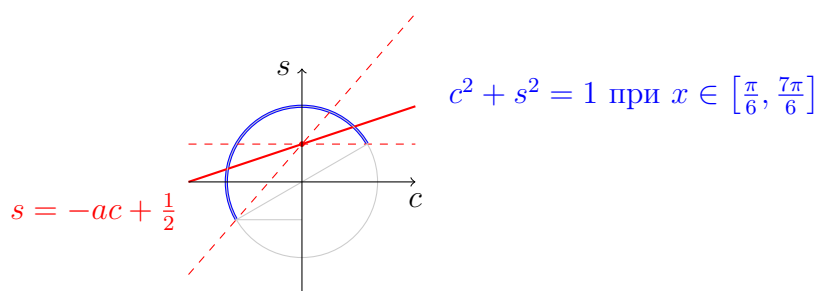
**В-1** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\sin x + a \cos x = \frac{1}{2}$$

имеет не менее двух корней на отрезке  $[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$ ? В ответе укажите среднее арифметическое самого большого и самого малого значения  $a$ , при необходимости округлённое до сотых.

**Ответ:** -0.58

**Решение.** Для решения можно заменить  $\sin x$  на величину  $s$ ,  $\cos x$  на величину  $c$ . После чего можно нарисовать такие графики на плоскости  $(c, s)$ :



Уравнению соответствует линейная функция, проходящая через фиксированную точку  $(0, 0.5)$ , от параметра зависит угловой коэффициент прямой. Синяя дуга на окружности  $s^2 + c^2 = 1$  показывает, какие значения могут действительно принимать  $c = \cos x, s = \sin x$  при  $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$ . Требованиям задачи подходят такие значения  $a$ , при которых красная линия пересекает дугу в двух разных точках. Несложно подсчитать тангенсы угла наклона прямых в крайних случаях (пунктирных):

$$\frac{\frac{1}{2} - \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = 0, \quad \frac{\frac{1}{2} - \sin \frac{7\pi}{6}}{-\cos \frac{7\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Откуда получаем ответ (не забываем, что угловой коэффициент равен  $-a$ ):

$$a \in \left[ -\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0 \right]$$

---

**В-2** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\sin x + a \cos x = \frac{1}{2}$$

имеет не менее двух корней на отрезке  $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ ? В ответе укажите среднее арифметическое самого большого и самого малого значения  $a$ , при необходимости округлённое до сотых.

**Ответ:**  $-1$

---

**В-3** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\sin x + a \cos x = \frac{1}{2}$$

имеет не менее двух корней на отрезке  $[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ ? В ответе укажите среднее арифметическое самого большого и самого малого значения  $a$ , при необходимости округлённое до сотых.

**Ответ:**  $-1.73$

---

**В-4** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\sin x + a \cos x = \frac{1}{2}$$

имеет не менее двух корней на отрезке  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ ? В ответе укажите среднее арифметическое самого большого и самого малого значения  $a$ , при необходимости округлённое до сотых.

**Ответ:**  $0.58$

---

**В-5** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\sin x + a \cos x = \frac{1}{2}$$

имеет не менее двух корней на отрезке  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ ? В ответе укажите среднее арифметическое самого большого и самого малого значения  $a$ , при необходимости округлённое до сотых.

**Ответ:**  $1$

---

**В-6** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\sin x + a \cos x = \frac{1}{2}$$

имеет не менее двух корней на отрезке  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ ? В ответе укажите среднее арифметическое самого большого и самого малого значения  $a$ , при необходимости округлённое до сотых.

**Ответ:**  $1.73$

---

#### Задача 4

**В-1**



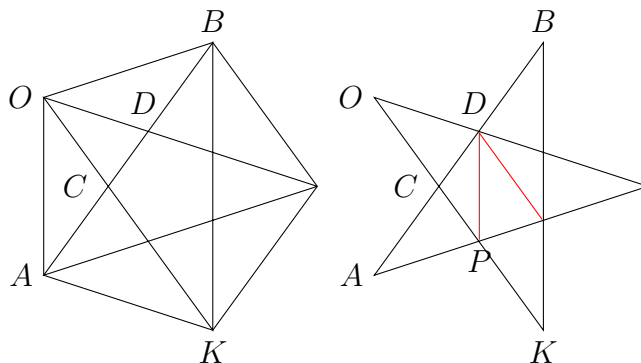
Пятиугольная звезда носит штаны (см. рисунок). Во сколько раз площадь звезды больше площади штанов? В ответе укажите сумму этого отношения и  $\sqrt{5}$ .

Звезда правильная, то есть она строится из пяти отрезков, соединяющих не соседние вершины правильного пятиугольника.

Для справки:  $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$ .

**Ответ:** 5

**Решение.**



Из формулы суммы углов многоугольника несложно вывести, что  $\angle AOB = \frac{3\pi}{5}$ , откуда находим углы при основании равнобедренного  $AOB$ :  $\angle OBD = \angle OAC = \frac{\pi}{5}$ , а так как  $OBD$  и  $OAC$  тоже равнобедренные, то  $\angle BOD = \angle AOC = \frac{\pi}{5}$ , в итоге  $\angle COD = \frac{\pi}{5}$ .

Проведём в звезде дополнительное построение и увидим, что площадь «штанов» равна  $2a + b$ , а площадь всей звезды равна  $6a + 2b$ , где  $a$  — это площадь лучика звезды (например, треугольника  $COD$ ), а  $b$  — площадь тупоугольного треугольника  $CDP$ .

Пусть длина луча звезды (отрезка  $OD$ ) равна  $x$ . Тогда  $PD = x$  тоже. Выразим площади треугольников (углы в них известны):

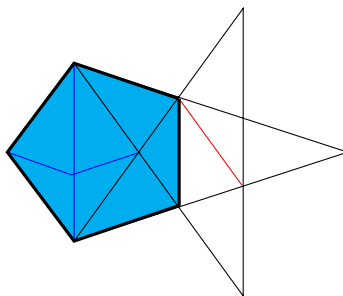
$$a = \frac{x^2}{2} \sin \frac{\pi}{5}, \quad b = \frac{x^2}{4} \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{5}}, \quad \frac{a}{b} = 2 \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Тогда нужное отношение равно

$$\frac{6a + 2b}{2a + b} = \frac{3 + 3\sqrt{5} + 2}{1 + \sqrt{5} + 1} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} = 5 - \sqrt{5}$$

Ответ равен  $5 - \sqrt{5}$ .

Во втором варианте разбить надо так:

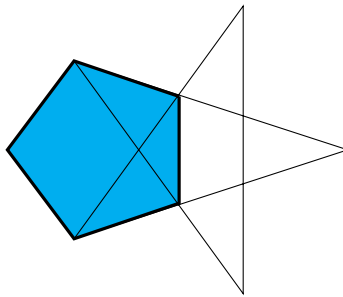


Получится, что площадь пятиугольника равна  $4a + 3b$ , а площадь звезды равна  $6a + 2b$ . Значит, их отношение равно

$$\frac{6a + 2b}{4a + 3b} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$$

В третьем варианте считается отношение  $\frac{3a}{6a+2b} = \frac{3}{4} - \frac{3}{20}\sqrt{5}$ .

В четвёртом варианте — отношение равно  $\frac{6a+2b}{2a+2b} = \sqrt{5}$ .



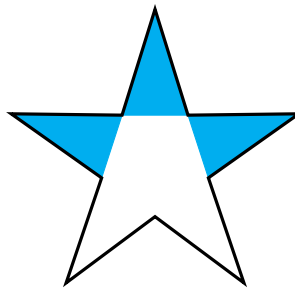
Звезда застряла в правильном пятиугольнике (см. рисунок). Во сколько раз площадь синей области меньше площади звезды? В ответе укажите разность этого отношения и  $\sqrt{5}$ .

Звезда правильная, то есть она строится из пяти отрезков, соединяющих не соседние вершины правильного пятиугольника.

Для справки:  $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$ .

**Ответ:**  $-1$

**В-3**



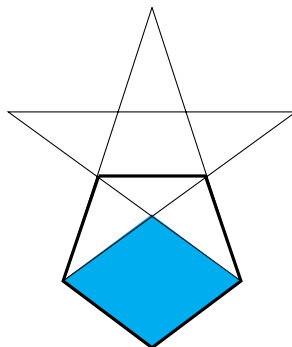
Звезда покрасила себе ногти (см. рисунок). Какую долю своей площади она покрасила? Полученное отношение умножьте на 20, прибавьте к нему  $3\sqrt{5}$  и укажите в ответе результат этих операций.

Звезда правильная, то есть она строится из пяти отрезков, соединяющих не соседние вершины правильного пятиугольника.

Для справки:  $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$ .

**Ответ:** 15

**В-4**



Звезда оседлала ромб, и получилось так, что в их объединение можно вписать правильный пятиугольник (см. рисунок). Во сколько раз площадь звезды больше площади ромба? В ответе укажите квадрат этой величины

Звезда правильная, то есть она строится из пяти отрезков, соединяющих не соседние вершины правильного пятиугольника.

Для справки:  $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$ .

**Ответ:** 5

**В-1** На клетчатой доске размера  $10 \times 10$  отмечена клетка в третьей строке во втором столбце. Найдите среднее арифметическое площадей прямоугольников, состоящих из целых клеток доски и содержащих отмеченную клетку.

**Ответ:** 30.25

**Решение.** Будем задавать прямоугольник, содержащий отмеченный квадрат, с помощью параметров  $k_1 = 0 \dots a - 1$ ,  $k_2 = 0 \dots n - a$ ,  $k_3 = 0 \dots b - 1$ ,  $k_4 = 0 \dots n - b$ , обозначающих расстояние от клетки до границы прямоугольника слева, справа, снизу и сверху, соответственно. Легко видеть, что количество подходящих прямоугольников равно  $ab(n - a + 1)(n - b + 1)$ . Так как площадь прямоугольника с заданными параметрами равна  $(k_1 + k_2 + 1)(k_3 + k_4 + 1)$ , то сумма этих площадей равна  $\sum (k_1 + k_2 + 1)(k_3 + k_4 + 1)$ . Сдвигая параметры суммирования так, что  $k_1 = 1 \dots a$ ,  $k_2 = 0 \dots n - a$ ,  $k_3 = 1 \dots b$ ,  $k_4 = 0 \dots n - b$ , получаем  $\sum (k_1 + k_2)(k_3 + k_4) = \sum k_1 k_3 + \sum k_1 k_4 + \sum k_2 k_3 + \sum k_2 k_4 = \frac{1}{4}(n - a + 1)(n - b + 1)a(a + 1)b(b + 1) + \frac{1}{4}(n - a + 1)ba(a + 1)(n - b)(n - b + 1) + \frac{1}{4}a(n - b + 1)(n - a)(n - a + 1)b(b + 1) + \frac{1}{4}ab(n - a)(n - a + 1)(n - b)(n - b + 1) = \frac{1}{4}ab(n - a + 1)(n - b + 1)((a + 1)(b + 1) + (a + 1)(n - b) + (n - a)(b + 1) + (n - a)(n - b)) = \frac{1}{4}ab(n - a + 1)(n - b + 1)(n + 1)^2$ . Деля результат на количество прямоугольников, получаем ответ.

---

**В-2** На клетчатой доске размера  $10 \times 10$  отмечена клетка в пятой строке в пятом столбце. Найдите среднее арифметическое площадей прямоугольников, состоящих из целых клеток доски и содержащих отмеченную клетку.

**Ответ:** 30.25

---

**В-3** На клетчатой доске размера  $10 \times 10$  отмечена клетка в седьмой строке в первом столбце. Найдите среднее арифметическое площадей прямоугольников, состоящих из целых клеток доски и содержащих отмеченную клетку.

**Ответ:** 30.25

---

**В-4** На клетчатой доске размера  $12 \times 12$  отмечена клетка в третьей строке во втором столбце. Найдите среднее арифметическое площадей прямоугольников, состоящих из целых клеток доски и содержащих отмеченную клетку.

**Ответ:** 42.25

---

**В-5** На клетчатой доске размера  $12 \times 12$  отмечена клетка в пятой строке в пятом столбце. Найдите среднее арифметическое площадей прямоугольников, состоящих из целых клеток доски и содержащих отмеченную клетку.

**Ответ:** 42.25

---

**В-6** На клетчатой доске размера  $12 \times 12$  отмечена клетка в седьмой строке в первом столбце. Найдите среднее арифметическое площадей прямоугольников, состоящих из целых клеток доски и содержащих отмеченную клетку.

**Ответ:** 42.25

---

### Задача 6

**В-1** Дано:  $x^5 y^4 - x^4 y^5 = 8$ ,  $x^3 y^3(x^3 - y^3) = 25$ . Запишем наибольшее возможное рациональное значение выражения  $x^3 y^3 - x^3 + y^3$  в виде дроби  $\frac{n}{m}$ , где  $n, m$  — натуральные числа, НОД  $(n, m) = 1$ . Найдите  $2n + 3m$

**Ответ:** 102

**Решение.** Разложим на множители данные уравнения:

$$x^4 y^4 (x - y) = 8,$$

$$x^3 y^3 (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 25.$$

Поделив второе уравнение на первое (очевидно,  $x \neq 0, y \neq 0, x \neq y$ ), получим

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{xy} = \frac{25}{8},$$

откуда  $\frac{(x-y)^2}{xy} = \frac{25}{8} - 3 = \frac{1}{8}$ .

Так как из первого уравнения  $x - y = \frac{2^3}{(xy)^4}$ , то  $(xy)^9 = 8 \cdot 2^6$ , то есть  $(xy)^3 = 8$ . Поэтому  $x^3 - y^3 = \frac{25}{8}$ .

Значит, выражение  $x^3y^3 - x^3 + y^3$  при данных условиях принимает постоянное значение и равно  $8 - \frac{25}{8} = \frac{39}{8}$ . Поэтому  $n = 39, m = 8, 2n + 3m = 102$ .

**В-2** Дано:  $x^5y^4 - x^4y^5 = 64, x^3y^3(x^3 - y^3) = 200$ . Запишем наибольшее возможное рациональное значение выражения  $x^3y^3 - x^3 + y^3$  в виде дроби  $\frac{n}{m}$ , где  $n, m$  — натуральные числа, НОД  $(n, m) = 1$ . Найдите  $2n - 3m$

**Ответ:** 194

**В-3** Дано:  $x^5y^4 - x^4y^5 = 8, x^3y^3(x^3 - y^3) = 25$ . Запишем наибольшее возможное рациональное значение выражения  $x^3y^3 - x^3 + y^3$  в виде дроби  $\frac{n}{m}$ , где  $n, m$  — натуральные числа, НОД  $(n, m) = 1$ . Найдите  $2n - 3m$

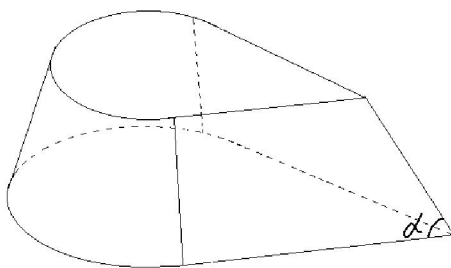
**Ответ:** 54

**В-4** Дано:  $x^5y^4 - x^4y^5 = 64, x^3y^3(x^3 - y^3) = 200$ . Запишем наибольшее возможное рациональное значение выражения  $x^3y^3 - x^3 + y^3$  в виде дроби  $\frac{n}{m}$ , где  $n, m$  — натуральные числа, НОД  $(n, m) = 1$ . Найдите  $2n + m$

**Ответ:** 210

## Задача 7

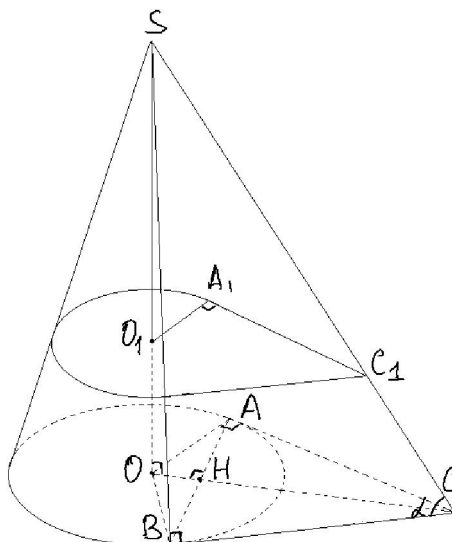
**В-1**



Конструкцию центральных опор речных мостов часто снабжают ледорезами, в результате чего опоры приобретают вид тела, ограниченного двумя параллельными плоскостями, частью боковой поверхности усечённого конуса, а также двумя касательными к этому конусу плоскостями (см. рисунок). Найдите объём такой опоры, если радиусы большего и меньшего оснований усечённого конуса равны 3 и 2 соответственно, его высота равна  $2\sqrt{2}$ , а углы  $\alpha$  при общей нижней вершине в четырёхугольниках, образующих «плоские» части боковой поверхности опоры, равны  $\frac{\pi}{3}$ . Ответ округлите до целого числа.

**Ответ:** 69

**Решение.**



Достроим опору до конической фигуры. Тогда искомый объём будет равен разности объёмов двух подобных конусов. Объём большего конуса равен

$$V = \frac{2\pi - \angle AOB}{2\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot SO \cdot \pi r^2 + \frac{1}{3} SO \cdot \frac{1}{2} \cdot OC \cdot AB,$$

где  $r$  — радиус нижнего основания

В силу подобия (через  $k$  обозначим коэффициент подобия конусов, через  $h$  — высоту конуса)

$$\frac{SO}{SO_1} = \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{1}{k} \Rightarrow SO = \frac{h}{1-k}.$$

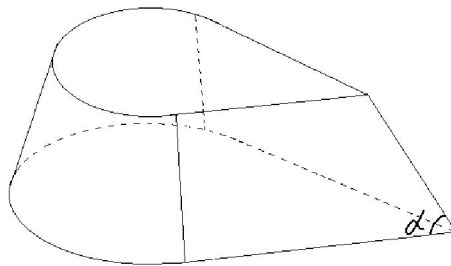
$$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{\frac{h^2}{(1-k)^2} + r^2} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2(1-k)^2}}{1-k}$$

$$BC = SB \operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{tg} OCB = \frac{OB}{BC}$$

Во всех вариантах  $\angle OCB$  равен  $\frac{\pi}{6}$ , то есть  $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$ .

$$V_{\text{опоры}} = (1 - k^3)V = (1 - k^3) \left( \frac{2}{9} \frac{hr^2}{(1-k)} \pi + \frac{hr \operatorname{ctg} \alpha}{3(1-k)^2} \sqrt{h^2 + r^2(1-k)^2} \right)$$

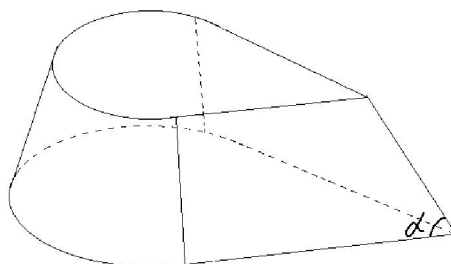
## В-2



Конструкцию центральных опор речных мостов часто снабжают ледорезами, в результате чего опоры приобретают вид тела, ограниченного двумя параллельными плоскостями, частью боковой поверхности усечённого конуса, а также двумя касательными к этому конусу плоскостями (см. рисунок). Найдите объём такой опоры, если радиусы большего и меньшего оснований усечённого конуса равны 7 и 1 соответственно, его высота равна  $12\sqrt{2}$ , а углы  $\alpha$  при общей нижней вершине в четырёхугольниках, образующих «плоские» части боковой поверхности опоры, равны  $\frac{\pi}{3}$ . Ответ округлите до целого числа.

**Ответ:** 1234

## В-3

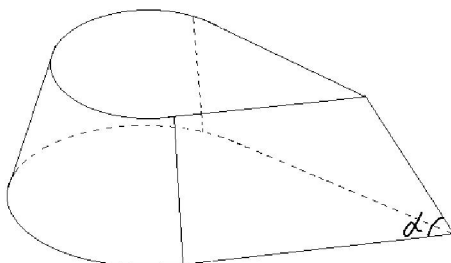




Конструкцию центральных опор речных мостов часто снабжают ледорезами, в результате чего опоры приобретают вид тела, ограниченного двумя параллельными плоскостями, частью боковой поверхности усечённого конуса, а также двумя касательными к этому конусу плоскостями (см. рисунок). Найдите объём такой опоры, если радиусы большего и меньшего оснований усечённого конуса равны 4 и 1 соответственно, его высота равна  $6\sqrt{2}$ , а углы  $\alpha$  при общей нижней вершине в четырёхугольниках, образующих «плоские» части боковой поверхности опоры, равны  $\frac{\pi}{3}$ . Ответ округлите до целого числа.

**Ответ:** 227

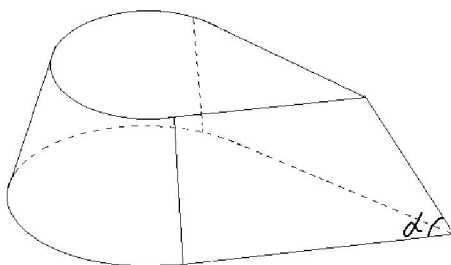
**В-4**



Конструкцию центральных опор речных мостов часто снабжают ледорезами, в результате чего опоры приобретают вид тела, ограниченного двумя параллельными плоскостями, частью боковой поверхности усечённого конуса, а также двумя касательными к этому конусу плоскостями (см. рисунок). Найдите объём такой опоры, если радиусы большего и меньшего оснований усечённого конуса равны 4 и 2 соответственно, его высота равна  $4\sqrt{2}$ , а углы  $\alpha$  при общей нижней вершине в четырёхугольниках, образующих «плоские» части боковой поверхности опоры, равны  $\frac{\pi}{3}$ . Ответ округлите до целого числа.

**Ответ:** 202

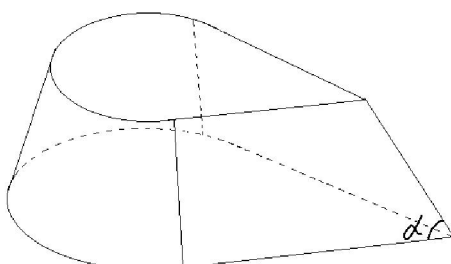
**В-5**



Конструкцию центральных опор речных мостов часто снабжают ледорезами, в результате чего опоры приобретают вид тела, ограниченного двумя параллельными плоскостями, частью боковой поверхности усечённого конуса, а также двумя касательными к этому конусу плоскостями (см. рисунок). Найдите объём такой опоры, если радиусы большего и меньшего оснований усечённого конуса равны 5 и 2 соответственно, его высота равна  $3\sqrt{2}$ , а углы  $\alpha$  при общей нижней вершине в четырёхугольниках, образующих «плоские» части боковой поверхности опоры, равны  $\frac{\pi}{4}$ . Ответ округлите до целого числа.

**Ответ:** 211

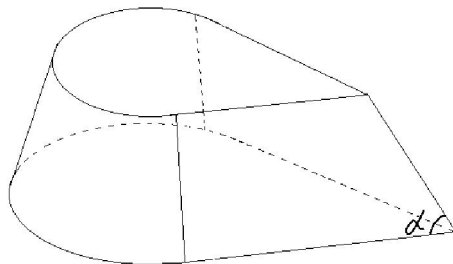
**В-6**



Конструкцию центральных опор речных мостов часто снабжают ледорезами, в результате чего опоры приобретают вид тела, ограниченного двумя параллельными плоскостями, частью боковой поверхности усечённого конуса, а также двумя касательными к этому конусу плоскостями (см. рисунок). Найдите объём такой опоры, если радиусы большего и меньшего оснований усечённого конуса равны 5 и 1 соответственно, его высота равна  $4\sqrt{2}$ , а углы  $\alpha$  при общей нижней вершине в четырёхугольниках, образующих «плоские» части боковой поверхности опоры, равны  $\frac{\pi}{4}$ . Ответ округлите до целого числа.

**Ответ:** 224

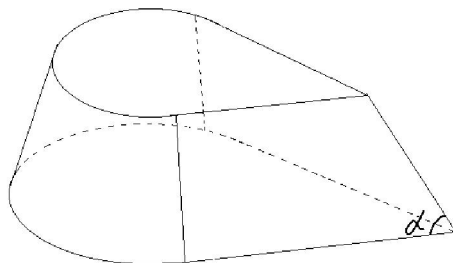
**В-7**



Конструкцию центральных опор речных мостов часто снабжают ледорезами, в результате чего опоры приобретают вид тела, ограниченного двумя параллельными плоскостями, частью боковой поверхности усечённого конуса, а также двумя касательными к этому конусу плоскостями (см. рисунок). Найдите объём такой опоры, если радиусы большего и меньшего оснований усечённого конуса равны 6 и 2 соответственно, его высота равна  $4\sqrt{2}$ , а углы  $\alpha$  при общей нижней вершине в четырёхугольниках, образующих «плоские» части боковой поверхности опоры, равны  $\frac{\pi}{4}$ . Ответ округлите до целого числа.

**Ответ:** 375

**В-8**



Конструкцию центральных опор речных мостов часто снабжают ледорезами, в результате чего опоры приобретают вид тела, ограниченного двумя параллельными плоскостями, частью боковой поверхности усечённого конуса, а также двумя касательными к этому конусу плоскостями (см. рисунок). Найдите объём такой опоры, если радиусы большего и меньшего оснований усечённого конуса равны 7 и 2 соответственно, его высота равна  $5\sqrt{2}$ , а углы  $\alpha$  при общей нижней вершине в четырёхугольниках, образующих «плоские» части боковой поверхности опоры, равны  $\frac{\pi}{4}$ . Ответ округлите до целого числа.

**Ответ:** 604

### Задача 8

**В-1** В школьном гардеробе имеется 12 пронумерованных вешалок. Два гардеробщика решили сыграть в такую игру. Первый из них вешает номерок с числом 1 на произвольную вешалку. А второй последовательно развешивает оставшиеся номерки с числами от 2 до 12 на свободные вешалки по следующему правилу: если вешалка с номером, совпадающим с числом на номерке, свободна, то номерок вешают на эту вешалку. В противном случае номерок вешают на любую свободную вешалку. Сколько существует способов развесить номерки так, чтобы номерок с числом 12 оказался на 12-й вешалке?

**Ответ:** 1024

**Решение.** Докажем индукцией по количеству  $N > 1$  вешалок в гардеробе, что возможных способов имеется  $2^{N-2}$ .

База индукции:  $N = 2$ . Число способов равно единице.

Шаг индукции: предположим, что для  $(N-1)$  вешалок ответ верен, докажем для  $N$  вешалок.

Если 1-й номерок повесить на 1-е или  $N$ -е место, то остальные номерки размещаются однозначно. При этом ясно, что из этих двух размещений нам подходит только такое, при котором 1-й номерок висит на 1-й вешалке.

Далее, заметим, что если 1-й номерок оказался на  $(N-j)$ -й вешалке, то число нужных расстановок такое же, как и для  $(j+1)$  вешалок (т.к. номерки со 2-го по  $(N-j-1)$  развешиваются однозначно). Поэтому для  $N$  вешалок имеем  $1 + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{N-3}) = 2^{N-2}$ .

---

**В-2** В школьном гардеробе имеется 9 пронумерованных вешалок. Два гардеробщика решили сыграть в такую игру. Первый из них вешает номерок с числом 1 на произвольную вешалку. А второй последовательно развешивает оставшиеся номерки с числами от 2 до 9 на свободные вешалки по следующему правилу: если вешалка с номером, совпадающим с числом на номерке, свободна, то номерок вешают на эту вешалку. В противном случае номерок вешают на любую свободную вешалку. Сколько существует способов развесить номерки так, чтобы номерок с числом 9 оказался на 9-й вешалке?

**Ответ:** 128

---

**В-3** В школьном гардеробе имеется 10 пронумерованных вешалок. Два гардеробщика решили сыграть в такую игру. Первый из них вешает номерок с числом 1 на произвольную вешалку. А второй последовательно развешивает оставшиеся номерки с числами от 2 до 10 на свободные вешалки по следующему правилу: если вешалка с номером, совпадающим с числом на номерке, свободна, то номерок вешают на эту вешалку. В противном случае номерок вешают на любую свободную вешалку. Сколько существует способов развесить номерки так, чтобы номерок с числом 10 оказался на 10-й вешалке?

**Ответ:** 256

---

**В-4** В школьном гардеробе имеется 11 пронумерованных вешалок. Два гардеробщика решили сыграть в такую игру. Первый из них вешает номерок с числом 1 на произвольную вешалку. А второй последовательно развешивает оставшиеся номерки с числами от 2 до 11 на свободные вешалки по следующему правилу: если вешалка с номером, совпадающим с числом на номерке, свободна, то номерок вешают на эту вешалку. В противном случае номерок вешают на любую свободную вешалку. Сколько существует способов развесить номерки так, чтобы номерок с числом 11 оказался на 11-й вешалке?

**Ответ:** 512

---